

SCHWANKUNG VON POLYNOMEN

Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der

Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Eckhard Voges

aus Stettin

Bochum 1969





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546621_0012



SCHWANKUNG VON POLYNOMEN

Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

der

Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Eckhard Voges

aus Stettin

Bochum 1969

SCHWANKUNG VON POLYOMEN

Dissertation

zur
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
bei
Königsgesellschaft
an der Universität Bonn



Dissertation eingereicht am: 11.3.1969

Tag der mündlichen Prüfung : 28.4.1969

Dekan:	Prof. Dr. Günter Ewald
Referent:	Prof. Dr. Hartmut Ehlich
Korreferent:	Doz. Dr. Wilhelm Niethammer

Inhaltsverzeichnis

<u>1.</u>	<u>Einleitung</u>	<u>1</u>
<u>2.</u>	<u>Trigonometrische Polynome</u>	<u>10</u>
2.1	Eine Aussage über Čebyšev-Polynome	10
2.2	Eine Extremaleigenschaft gewisser trigonometrischer Polynome	12
2.3	Das Verhalten von $\ T_n(\alpha)\ $ für große n	23
<u>3.</u>	<u>Algebraische Polynome</u>	<u>29</u>
3.1	Schwankung von algebraischen Polynomen	29
3.2	Charakterisierung der algebraischen Extre- malpolynome	36
3.3	Spezielle Extremalpolynome	44
<u>4.</u>	<u>Literaturverzeichnis</u>	<u>57</u>



1. Einleitung

Bei der Darstellung von Funktionen in Rechenanlagen werden meistens Polynome betrachtet, die im Rahmen der Rechengenauigkeit mit der Funktion übereinstimmen. Solche Polynome Q_n vom Grade n erhält man fast immer aus theoretischen Überlegungen, z.B. aus der Taylor-Entwicklung. Dabei zeigt sich, daß der zu wählende Grad recht groß ist. Das Problem, eine gegebene Funktion f durch Polynome möglichst geringen Grades zu approximieren, ist dann darauf zurückgeführt, ein Polynom n -ten Grades durch ein Polynom Q_r , r -ten Grades, zu approximieren. Aufgrund der begrenzten Rechengenauigkeit kann nun Q_n nicht im ganzen gegebenen Intervall, sondern nur an diskreten Punkten durch Q_r approximiert werden, aus Gründen der Ökonomie möchte man die Anzahl dieser Punkte möglichst gering halten. Da die Differenz $P_n = Q_n - Q_r$ wiederum ein Polynom höchstens n -ten Grades ist, stellt sich dann die Frage: Wenn an $m+1$ Punkten $x_0, \dots, x_m$ der Wert von P_n klein ist, etwa

$$|P_n(x_i)| \leq \delta_i \leq \delta \quad \text{für } i = 0, \dots, m,$$

wie groß kann dann die Supremumsnorm $\|P_n\|$ über das betrachtete Intervall werden, oder wieviele Punkte x_i müssen gewählt werden und wie müssen diese im Intervall gewählt werden, damit diese Norm nicht wesentlich größer als δ wird?

Für spezielle Punktgitter wurden diese Fragen mehrfach untersucht; insbesondere zeigte Ehlich (1966), daß für äquidistante Wahl der x_i die Norm $\|P_n\|$ nur dann beschränkt bleibt, wenn $m \geq k \cdot n^2$ ist. Das Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, daß bei beliebiger Wahl der Punkte x_i gewisse Intervalllängen $x_i - x_{i+1}$ für das Verhalten der Norm von P_n die entscheidende Rolle spielen.

Da es bei diesen Untersuchungen auf konstante Faktoren nicht ankommt, kann o.B.d.A. $\delta = 1$ gewählt werden, ebenso kann man sich im Fall algebraischer Polynome auf das Intervall $[-1, 1]$ und im periodischen Fall auf das Intervall $[0, 2\pi)$ beschränken.

Genauer formuliert lautet das Problem im algebraischen Fall:

Es seien die $m+1$ Gitterpunkte x_i mit

$$(1.1) \quad -1 \leq x_m \leq \dots \leq x_0 \leq 1$$

gegeben. Das algebraische Polynom P_n höchstens n -ten Grades genüge der Gitterbedingung

$$(1.2) \quad |P_n(x_i)| \leq 1 \quad \text{für } i = 0, \dots, m.$$

Wie verhält sich dann die Norm

$$(1.3) \quad \|P_n\| := \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)| \quad ?$$

Im trigonometrischen Fall wird das Problem analog formuliert:

Unter der Voraussetzung, daß $m+1$ Gitterpunkte t_i mit

$$(1.4) \quad 0 \leq t_0 < \dots < t_m < 2\pi$$

und ein trigonometrisches Polynom T_n von höchstens n -tem Grad die Gitterbedingung

$$(1.5) \quad |T_n(t_i)| \leq 1 \quad \text{für } i = 0, \dots, m$$

erfüllen, werden Aussagen über die Norm

$$(1.6) \quad \|T_n\| := \sup_{0 \leq t < 2\pi} |T_n(t)|$$

gesucht.

Da in dieser Arbeit vornehmlich algebraische Polynome

behandelt werden sollen, werden hier kurz die Ergebnisse solcher Untersuchungen über algebraische Polynome zusammengestellt.

Für $m < n$ läßt sich an einem weiteren von den vorhandenen Stützstellen verschiedenem Gitterpunkt x_{m+1} mit $|x_{m+1}| \leq 1$ jeder beliebige Funktionswert für ein Interpolationspolynom P_n höchstens n -ten Grades vorschreiben, so daß also eine Abschätzung von $\|P_n\|$ unmöglich ist.

Der Fall $m = n$ stellt den Inhalt eines Satzes von Faber (1914) dar: Bei den vorliegenden Voraussetzungen gibt es mindestens ein x mit $|x| \leq 1$ und

$$|P_n(x)| \geq \frac{1}{42} \frac{n}{n-1}.$$

Diese Schranke gilt nach dem Beweis von Fejér (1930) (vgl. auch Natanson, Bd. III (1965)).

Für $m > n$ gibt es für spezielle Gitter folgende Ergebnisse:

Ist das Gitter trigonometrisch äquidistant, d.h. liegen Čebyšev-Nullstellen

$$x_i = \cos \frac{2i-1}{2m} \pi \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

bzw. Čebyšev-Extremalstellen

$$x_i = \cos \frac{i}{m} \pi \quad \text{für } i = 0, \dots, m$$

vor, so gilt aufgrund der Übertragung des entsprechenden Satzes für trigonometrische Polynome, der mit der Schnittpunktmethode von Riesz (1914) bewiesen wird,

$$\|P_n\| \leq \frac{1}{\cos \frac{n\pi}{2m}},$$

(Ehlich / Zeller (1964) und (1965)).

Für $m \geq n^2$ wurde unter Verwendung der Markov-Ungleichung für äquidistante Gitter mit den $m + 1$ Punkten

$$x_i = 1 - \frac{2i}{m} \quad \text{für } i = 0, \dots, m$$

gezeigt: Es gilt

$$\|P_n\| \leq \frac{1}{1 - \vartheta}$$

mit

$$\vartheta = \frac{n^2}{m},$$

(Ehlich (1967)), bzw. mit

$$\vartheta = \frac{n^2(n^2 - 1)}{6m^2},$$

(Ehlich / Zeller (1964)).

Für dieses letzte $\mathfrak{z}$ und

$$m > \left(\sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{\pi}{2n} \right)^{-1}$$

wurde mit Hilfe der Schnittpunktmethode von Riesz (1914) die Abschätzung für äquidistante Gitter verbessert zu

$$\|P_n\| \leq \left(\cos n \arcsin \frac{1}{m \sin \frac{\pi}{n}} \right)^{-1} \leq \frac{1}{1 - \frac{2}{3}}$$

(Ehlich / Zeller (1965)).

Numerische Untersuchungen haben gezeigt, daß diese Abschätzungen für die speziellen Gitter ziemlich scharf sind, wenn bei trigonometrisch äquidistanten Gittern ungefähr m gleich n Stützstellen und bei algebraisch äquidistanten Gittern ungefähr m gleich n^2 Stützstellen verwendet werden (Ehlich / Zeller (1964) und (1965)).

Daß diese Abschätzungen nicht zu Schranken führen können, die von n bzw. m unabhängig sind, zeigt dieses bereits oben erwähnte Ergebnis: Zu äquidistanten Gittern mit $m = m(n) = o(n^2)$ Stützstellen gibt es eine Folge von Polynomen P_n vom Grad n , so daß die Gitterbedingung erfüllt ist, für die aber

$$\|P_n\| \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt, (Ehlich (1966)). Zum Beweis werden Zolotarev-Polynome betrachtet, und im wesentlichen wird der Abstand der beiden Gitterpunkte $x_0 = 1$ und x_1 , also $1 - x_1$ verwandt.

Die zitierten Untersuchungen zeigen, wie in Abhängigkeit vom Grad n bei gegebener Verteilung der Gitterpunkte deren Anzahl gewählt werden muß. In der vorliegenden Arbeit werden daher Folgen von Polynomen betrachtet, deren Grad n wächst. Es wird gezeigt, daß für beliebige Punktgitter die Norm der betrachteten Polynome mit n gegen ∞ wächst, falls für den trigonometrischen Abstand

$$\Delta(n, \lambda) = \arccos x_\lambda - \arccos x_{\lambda-1}$$

irgendzweier benachbarter Gitterpunkte x_λ und $x_{\lambda-1}$ gilt, daß

$$\Delta(n, \lambda) = \frac{2 h(n)}{n}$$

mit $h(n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ ist. Zuerst wird der Fall trigonometrischer Polynome untersucht, da sich hier leichter genaue Aussagen machen lassen. Unter der zusätzlichen Bedingung, daß

$$|T_n(t)| \leq 1$$

für $0 \leq t \leq t_{\lambda-1}$ und für $t_{\lambda} \leq t \leq 2\pi$

ist, werden nämlich die Polynome konstruiert, die von größter Norm sind ("Extremalpolynome T_n "), und es ergibt sich für die Berechnung der Norm ein einfacher Ausdruck. Außerdem zeigt sich, daß zu $t_{\lambda-1}$ und t_{λ} das Extremalpolynom T_n n-ten Grades eindeutig bestimmt ist.

Bei der Behandlung der algebraischen Polynome stellt sich dann heraus, daß sich allgemein nur etwas schwächere Sätze beweisen lassen. So wird gezeigt, daß es bei entsprechender Zusatzbedingung

$$|P_n(x)| \leq 1$$

für $-1 \leq x \leq x_{\lambda}$ und für $x_{\lambda-1} \leq x \leq 1$,

Polynome P_n gibt, deren Norm von der Größenordnung der entsprechenden trigonometrischen Polynome T_n ist. Für die algebraischen Extremalpolynome R_n wird eine Charakterisierung angegeben, deren wesentlichster Bestandteil eine Differentialgleichung ist. Aufgrund dieser Charakterisierung wird dann gezeigt, daß die Extremalpolynome, falls existent, eindeutig sind, und auch hier wird für deren Norm ein numerisch leicht auszuwertender Ausdruck angegeben. Für die

Punktgitter mit den zusätzlichen Eigenschaften

$x_{\lambda-1} = x_0 = 1$ bzw. $x_\lambda = -x_{\lambda-1}$ werden die Extremalpolynome konstruiert, und für allgemeine Gitter wird zum Schluß auf ein Konstruktionsverfahren verwiesen, das Extremalpolynome zu x_λ^* und $x_{\lambda-1}^*$ mit $x_\lambda \leq x_\lambda^* < x_{\lambda-1}^* \leq x_{\lambda-1}$ liefert.

Herrn Prof. Dr. H. Ehlich danke ich sehr für viele lehrreiche und anregende Diskussionen.

2. Trigonometrische Polynome

Zur Vorbereitung der Aussage über die Schwankung von trigonometrischen Polynomen werden zuerst Čebyšev-Polynome betrachtet und Abschätzungen für deren Funktionswert für $x = A > 1$ angegeben.

2.1 Čebyšev-Polynome

Satz 1: Für $A > 1$ gilt

$$(2.1) \quad \cosh \frac{n}{A} \sqrt{A^2 - 1} \leq \check{C}_n(A) \leq \cosh n \sqrt{A^2 - 1} .$$

Beweis: Die Čebyšev-Polynome

$$\check{C}_n(x) := \frac{1}{2} \left((x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right)$$

für alle x , bzw.

$$\check{C}_n(x) := \cos n \arccos x \quad \text{für } |x| \leq 1$$

genügen der Differentialgleichung

$$(2.2) \quad (1 - x^2)(y')^2 = n^2(1 - y^2) .$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung wird für $x > 1$

der Ansatz

$$y = \cosh z$$

gemacht. Dann ist

$$1 - y^2 = 1 - \cosh^2 z = -\sinh^2 z$$

und

$$y' = z' \sinh z .$$

Damit gilt

$$(1 - x^2)(z')^2 \sinh^2 z = n^2(-\sinh^2 z) ,$$

$$z' = \frac{n}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

und

$$z = n \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} ,$$

also

$$(2.3) \quad \vartheta_n(x) = \cosh n \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

für $x > 1$.

Es muß also

$$\vartheta_n(A) = \cosh n \int_1^A \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

für $A > 1$ abgeschätzt werden. Der Integrand enthält nur einen stets positiven Faktor, so daß das Integral positiv ist. Für positive Argumente ist der Kosinushyperbolicus eine monoton wachsende Funktion des Arguments. Deshalb ist zur Abschätzung von $\check{C}_n(A)$ nach oben bzw. nach unten das Integral entsprechend nach oben bzw. nach unten abzuschätzen.

Wegen

$$\int_1^A \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} \leq \int_1^A \frac{t dt}{\sqrt{t^2-1}} = \sqrt{t^2-1} \Big|_1^A = \sqrt{A^2-1}$$

und

$$\int_1^A \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} \geq \int_1^A \frac{t}{A} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{A} \sqrt{t^2-1} \Big|_1^A = \frac{1}{A} \sqrt{A^2-1}$$

gilt (2.1)

$$\cosh \frac{n}{A} \sqrt{A^2-1} \leq \check{C}_n(A) \leq \cosh n \sqrt{A^2-1}.$$

2.2 Eine Extremaleigenschaft gewisser trigonometrischer Polynome

Nun werden unter Verwendung von Čebyšev-Polynomen geeignete trigonometrische Polynome konstruiert, die dann zum Vergleich mit beliebigen trigonometrischen

Polynomen herangezogen werden.

Mit der Transformation

$$x = \frac{1}{2} (\bar{x} + 1)(A + 1) - 1$$

bzw.

$$\bar{x} = 2 \frac{x+1}{A+1} - 1 \quad \text{für } A \geq 1$$

wird das Intervall $-1 \leq x \leq A$ auf das Intervall $-1 \leq \bar{x} \leq 1$ abgebildet und es wird definiert

$$(2.4) \quad V_n(\bar{x}, A) := \check{O}_n(x) \quad .$$

Wird mit $\bar{a}$ das Bild von $x = 1$ bezeichnet, so gilt

$$(2.5) \quad \bar{a} = 2 \frac{1+1}{A+1} - 1 = 1 - 2 \frac{A-1}{A+1}$$

und es ist

$$|V_n(\bar{x}, A)| \leq 1 \quad \text{für } -1 \leq \bar{x} \leq \bar{a} ,$$

$$V_n(\bar{x}, A) \geq 1 \quad \text{für } \bar{a} < \bar{x} \leq 1$$

und

$$V_n(1, A) = \check{O}_n(A) \quad .$$

Nun wird mit Hilfe der Abbildung

$$\bar{x} = \cos \bar{t}$$

der Übergang zum trigonometrischen Polynom vollzogen. Dabei wird die Konvention des Hauptwertes berücksichtigt:

Konvention: Bei Verwendung der Abbildung

$$x = \cos t$$

bzw. deren Umkehrung

$$t = \arccos x$$

soll die Zuordnung stets so erfolgen, daß die beiden Intervalle

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

einander eineindeutig zugeordnet werden.

Mit der Abbildung $\bar{x} = \cos \bar{t}$ ergeben sich also Funktionswerte für das Intervall $0 \leq \bar{t} \leq \pi$. Das transformierte, trigonometrische Polynom enthält nur Potenzen von $\cos \bar{t}$. Deshalb können wegen $\cos \bar{t} = \cos (2\pi - \bar{t})$ die Funktionswerte auch für $\pi \leq \bar{t} \leq 2\pi$ und wegen der Periodizität damit für die ganze $\bar{t}$ -Achse fortgesetzt werden. Wird so

$$(2.6) \quad W_n(\bar{t}, \alpha) := V_n(\bar{x}, A)$$

mit

$$(2.7) \quad \alpha := \arccos \bar{a}$$

definiert, so gilt für $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$|W_n(\bar{t}, \alpha)| \leq 1 \quad \text{für} \quad 2l\pi + \alpha \leq \bar{t} \leq 2(l+1)\pi - \alpha,$$

$$W_n(\bar{t}, \alpha) \geq 1 \quad \text{für} \quad 2l\pi - \alpha \leq \bar{t} \leq 2l\pi + \alpha$$

und außerdem

$$W_n(2l\pi, \alpha) = \check{O}_n(A) \quad .$$

Mit der Translation

$$t = \bar{t} + \tau \quad \text{bzw.} \quad \bar{t} = t - \tau$$

mit $0 \leq \tau \leq 2\pi$ kann das trigonometrische Polynom natürlich so verschoben werden, daß der Extremwert für $t = 2l\pi + \tau$ angenommen wird. Für

$$(2.8) \quad T_n(t, \alpha) := W_n(\bar{t}, \alpha)$$

gilt also

$$|T_n(t, \alpha)| \leq 1 \quad \text{für} \quad 21\pi + \tau + \alpha \leq t \leq 2(1+1)\pi + \tau - \alpha,$$

$$T_n(t, \alpha) > 1 \quad \text{für} \quad 21\pi + \tau - \alpha < t < 21\pi + \tau + \alpha$$

und

$$T_n(21\pi + \tau, \alpha) = \chi_n(A).$$

Während $W_n(\bar{t}, \alpha)$ ein gerades trigonometrisches Polynom ist, ist $T_n(t, \alpha)$ i.a. nicht gerade.

Die Parameter A und α transformieren sich dabei insgesamt so: Einerseits ist natürlich nach (2.7)

$$(2.9) \quad \alpha := \arccos \left(1 - 2 \frac{A - 1}{A + 1} \right),$$

andererseits gilt nach (2.5)

$$A = 1 - 2 \frac{\bar{a} - 1}{\bar{a} + 1}$$

und damit

$$(2.10) \quad A = 1 + 2 \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = 1 + 2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Beim Beweis des Satzes über die Extremaleigenschaft der Polynome $T_n(\alpha)$ wird folgender Satz gebraucht, der in ähnlicher Form elementar von Motzkin / Walsh (1959)

und für algebraische Polynome elementar von Sloss (1965) und funktionentheoretisch von Ehlich (1966) bewiesen wurde.

Satz 2: Hat eine Funktion $f(x)$ an den $m+1$ verschiedenen Punkten x_v mit

$$x_m < x_{m-1} < \dots < x_1 < x_0$$

(schwach) alternierendes Vorzeichen, d.h. gilt etwa

$$(-1)^v f(x_v) \geq 0 \quad \text{für} \quad v = 0, \dots, m,$$

und ist $f(z)$ holomorph für

$$(2.11) \quad \left| z - \frac{x_0 + x_m}{2} \right| < \frac{x_0 - x_m + \delta}{2} \quad \text{mit} \quad \delta > 0,$$

so hat $f(x)$ in $[x_m, x_0]$ Nullstellen, deren Gesamtordnung mindestens gleich m ist.

Beweis: Mit Hilfe der Lagrange-Grundpolynome

$$l_v(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ v \neq k}}^m \frac{(x-x_k)}{(x_v-x_k)} = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_v)(x-x_v)}$$

für $v = 0, \dots, m$ wird die in der ganzen komplexen

Ebene holomorphe Funktion

$$\sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu l_\nu(z)$$

und mit (Satz vom Maximum des Betrages einer holomorphen Funktion)

$$M = M a x_{0 \leq \nu < 2\pi} \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu l_\nu\left(\frac{x_0+x_m}{2} + e^{i\nu} \frac{x_0-x_m+\delta}{2}\right)$$

$$\Sigma(z) := \frac{1}{M} \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu l_\nu(z)$$

gebildet. Für alle z , die der Ungleichung (2.11) genügen, gilt also

$$|\Sigma(z)| < 1.$$

Ist nun $f(z) \equiv 0$, so hat f keinen Häufungspunkt von Nullstellen und es gibt in der durch (2.11) definierten Kreisscheibe ein durch eine stückweise stetig differenzierbare Kurve γ berandetes einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathcal{G}$ mit

$$[x_m, x_0] \subset \mathcal{G}$$

und

$$f(z) \neq 0 \quad \text{für} \quad z \in (\mathcal{G} \cup \gamma) \setminus [x_m, x_0].$$

Sei etwa

$$|f(z)| > 2\varepsilon \quad \text{für } z \in \gamma.$$

Da für $z \in \gamma$

$$|f(z) + \varepsilon \sum(z)| = |-\varepsilon \sum(z)|$$

$$\geq |f(z)| - \varepsilon |\sum(z)| = \varepsilon |\sum(z)| > 0$$

und

$$(-1)^v (f(x_v) + \varepsilon \sum(x_v)) = (-1)^v f(x_v) + \frac{\varepsilon}{M} (-1)^{2v} > 0$$

ist, also $f(x) + \varepsilon \sum(x)$ in $[x_m, x_0]$ mindestens m Nullstellen hat, hat

$$f(x) = f(x) + \varepsilon \sum(x) + (-\varepsilon \sum(x))$$

nach dem Satz von Rouché in $[x_m, x_0]$ auch mindestens m Nullstellen.

Satz 3: Für ein beliebiges trigonometrisches Polynom t_n höchstens n -ten Grades gelte

$$|t_n(t)| \leq 1 \quad \text{für } 2l\pi + \tau + \alpha \leq t \leq 2(1+l)\pi + \tau - \alpha.$$

Dann gilt

$$(2.12) \quad \|t_n\| \leq \|T_n(\alpha)\| = \chi_n(A)$$

mit (2.10)

$$A = 1 + 2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} .$$

Dabei ist

$$\|t_n\| = \|T_n(\alpha)\| = \chi_n(A)$$

nur für $t_n \equiv T_n(\alpha)$.

Beweis: O.B.d.A. sei $\tau = 0$, und für σ mit

$|t_n(\sigma)| = \|t_n\|$ sei $-\alpha < \sigma < \alpha$, denn sonst ist $\|t_n\| \leq 1$ und also nichts zu beweisen. Außerdem sei $t_n(\sigma) > 0$, also $t_n(\sigma) = \|t_n\|$; sonst wird $-t_n$ betrachtet.

- a) Es sei $t_n \equiv T_n(\alpha)$. Dann sind alle Teile der Behauptung aufgrund der Konstruktion von $T_n(\alpha)$ erfüllt.
- b) Es ist also nur noch zu zeigen, daß die Annahme

$$t_n \neq T_n(\alpha) \quad \text{und} \quad \|t_n\| \geq \|T_n(\alpha)\|$$

auf einen Widerspruch führt.

Dazu wird das trigonometrische Polynom höchstens

n-ten Grades

$$S_n := T_n(\alpha) - \frac{\|T_n(\alpha)\|}{\|t_n\|} t_n$$

im Intervall $-\alpha \leq t \leq 2\pi - \alpha$ betrachtet und zwar
zuerst im Intervall $\alpha \leq t \leq 2\pi - \alpha$.

Da $\check{O}_n(x_\nu) = (-1)^\nu$ ist für $x_\nu = \cos \frac{\nu\pi}{n}$ für $\nu=0, \dots, n$,

ist auch $V_n(\bar{x}_\nu) = (-1)^\nu$ für $\bar{x}_\nu = 2 \frac{1 + \cos \frac{\nu\pi}{n}}{A+1} - 1$.

Weil für $\tau = 0$ nach Konstruktion $T_n(\alpha) = W_n(\alpha)$ ist,
gilt also für $\nu = 0, \dots, n$

$$T_n(21\pi \pm \xi_\nu) = (-1)^\nu$$

mit $\xi_\nu = \arccos \bar{x}_\nu$.

Von diesen Stellen ξ_ν liegen die folgenden in dem
zu betrachtenden Intervall:

$$\alpha = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-1} < \xi_n = \pi$$

$$\pi = 2\pi - \xi_n < 2\pi - \xi_{n-1} < \dots < 2\pi - \xi_0 = 2\pi - \alpha,$$

so daß es also in $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ $2n+1$ verschiedene auf-
einander folgende Stellen gibt, an denen der Funk-
tionswert von $T_n(\alpha)$ alternierendes Vorzeichen, aber

stets den Betrag 1 hat. Wegen $|t_n(t)| \leq 1$ für

$\alpha \leq t \leq 2\pi - \alpha$ und $\frac{\|T_n(\alpha)\|}{\|t_n\|} \leq 1$ hat S_n an diesen

$2n+1$ Stellen schwach alternierendes Vorzeichen. Da trigonometrische Polynome in der ganzen komplexen Zahlenebene holomorph sind, kann der Satz 2 angewandt werden und es ergibt sich, daß S_n in dem Intervall $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ mindestens $2n$ Nullstellen hat.

Um eine Aussage über $S_n(t)$ für $-\alpha < t < \alpha$ zu machen, wird σ mit $t_n(\sigma) = \|t_n\|$ gebraucht. Nach Voraussetzung ist $-\alpha < \sigma < \alpha$. Ist nun $\sigma = \tau = 0$, dann ist

$$S_n(\sigma) = \|T_n(\alpha)\| - \frac{\|T_n(\alpha)\|}{\|t_n\|} \|t_n\| = 0,$$

ist andererseits $\sigma \neq \tau$, dann ist

$$S_n(\tau) = \|T_n(\alpha)\| - \|T_n(\alpha)\| \frac{t_n(\tau)}{\|t_n\|} \geq 0$$

und

$$S_n(\sigma) = T_n(\sigma, \alpha) - \|T_n(\alpha)\| < 0,$$

so daß es nach dem Satz von Bolzano zwischen σ und τ auch mindestens eine Nullstelle von S_n in dem offenen Intervall $(-\alpha, \alpha)$ gibt. In beiden Fällen hat das trigonometrische Polynom S_n höchstens n -ten

Grades zusammen mit den mindestens $2n$ Nullstellen aus dem Intervall $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ in dem halboffenen Intervall $(-\alpha, 2\pi - \alpha]$ der Periodenlänge 2π also mindestens $2n+1$ Nullstellen, was ein Widerspruch ist.

2.3 Das Verhalten von $\|T_n(\alpha)\|$ für große n

Aus Satz 1 von 2.1 geht bereits hervor, daß $\chi_n(A) = \|T_n(\alpha)\|$ für festes A bzw. nach (2.10) entsprechend für festes α mit $n \rightarrow \infty$ auch gegen ∞ strebt.

Darum ist es interessant, $\|T_n(\alpha)\|$ einmal für eine monoton fallende Folge $\{A_n^*\}$ bzw. $\{\alpha_n^*\}$ zu untersuchen. Wird etwa

$$n(A_n^* - 1) = k > 0$$

gesetzt, dann ist

$$(n+1)(A_{n+1}^* - 1) = n(A_n^* - 1),$$

$$\frac{A_{n+1}^* - 1}{A_n^* - 1} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

die Folge der A_n^* also monoton fallend, und $\|T_n(\alpha_n^*)\|$ beschränkt. Für $n > k$ ist nämlich

$$0 < A_n^* - 1 = \frac{k}{n} < 1$$

und da

$$\sqrt{A_n^{*-1}} = (A_n^{*-1}) \sqrt{\frac{A_n^{*+1}}{A_n^{*-1}}}$$

ist, und $\sqrt{\frac{A_n^{*+1}}{A_n^{*-1}}}$ wegen $\frac{d \frac{x+1}{x-1}}{dx} = \frac{-2}{(x-1)^2}$

eine monoton fallende Funktion von A_n^* ist, ergibt sich

$$\|T_n(\alpha_n^*)\| \leq \cosh\left(k \sqrt{\frac{A_k^{*+1}}{A_k^{*-1}}}\right).$$

Solche Überlegungen führen, trigonometrisch formuliert, zu diesem Satz:

Satz 4: Zu jeder Verteilung von $m + 1$ Gitterpunkten mit

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m < 2\pi,$$

wobei nur für mindestens ein λ mit $0 < \lambda \leq m$

$$(2.13) \quad t_\lambda - t_{\lambda-1} = 2 \frac{h(n)}{n}$$

mit $0 < h(n) < n$ ist, gibt es stets ein trigonometrisches Polynom T_n vom Grad n mit

$$|T_n(t)| \leq 1$$

für $0 \leq t = t_{\lambda-1}$ und für $t_\lambda \leq t \leq 2\pi$

und

$$(2.14) \quad \cosh \frac{1}{2} h(n) < \|T_n\| < \cosh \frac{3}{2} h(n) .$$

Gilt dabei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = \infty ,$$

so ist also auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = \infty .$$

Beweis: Nach dem in 2.2 beschriebenen Konstruktionsverfahren wird

$$T_n(t, \alpha_n) := W_n(t - \tau_n, \alpha_n)$$

mit

$$\tau_n := \frac{t_\lambda + t_{\lambda-1}}{2}$$

und

$$\alpha_n := \frac{t_\lambda - t_{\lambda-1}}{2} = \frac{h(n)}{n}$$

gebildet und

$$T_n(t) := T_n(t, \alpha_n)$$

gesetzt. Es gilt dann also für $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$|T_n(t)| \leq 1 \quad \text{für} \quad 2l\pi + t_\lambda \leq t \leq 2(l+1)\pi + t_{\lambda-1}$$

und

$$\|T_n\| = \chi_n(A_n)$$

mit

$$A_n := 1 + 2 \tan^2 \frac{\alpha_n}{2}.$$

Damit kann $\|T_n\|$ mit den Ungleichungen (2.1) von Satz 1 abgeschätzt werden:

$$\cosh \frac{n}{A_n} \sqrt{A_n^2 - 1} \leq \|T_n\| \leq \cosh n \sqrt{A_n^2 - 1}.$$

Es ist

$$A_n^2 - 1 = 4 \tan^4 \frac{\alpha_n}{2} + 4 \tan^2 \frac{\alpha_n}{2} = 4 \tan^2 \frac{\alpha_n}{2} (1 + \tan^2 \frac{\alpha_n}{2}),$$

also

$$\sqrt{A_n^2 - 1} = 2 \tan \frac{\alpha_n}{2} \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\alpha_n}{2}}.$$

Wegen $0 < h(n) < n$ ist außerdem

$$0 < \alpha_n < 1.$$

Zur Abschätzung von $\|T_n\|$ nach unten wird verwandt:

$$\frac{h(n)}{2n} = \frac{\alpha_n}{2} \leq \tan \frac{\alpha_n}{2} < \tan \frac{1}{2} < 0,6,$$

$$\tan^2 \frac{\alpha_n}{2} < \tan^2 \frac{1}{2} < 0,6^2 < \frac{1}{2}.$$

Damit ist

$$\frac{h(n)}{n} \leq 2 \tan \frac{\alpha_n}{2}$$

und

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+2 \cdot \frac{1}{2}} < \frac{1}{1+2 \tan^2 \frac{\alpha_n}{2}} < \frac{\sqrt{1+\tan^2 \frac{\alpha_n}{2}}}{1+2 \tan^2 \frac{\alpha_n}{2}},$$

also

$$\begin{aligned} \cosh \frac{1}{2} h(n) &\leq \cosh n \frac{2 \tan \frac{\alpha_n}{2} \sqrt{1+\tan^2 \frac{\alpha_n}{2}}}{1+2 \tan^2 \frac{\alpha_n}{2}} \\ &= \cosh \frac{n}{A_n} \sqrt{A_n^2 - 1} \leq \|T_n\|. \end{aligned}$$

Die Abschätzung nach oben ergibt sich so: Wegen

$$\sqrt{A_n^2 - 1} = 2 \tan \frac{\alpha_n}{2} \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\alpha_n}{2}}$$

$$< 2 \frac{\frac{\alpha_n}{2}}{\frac{1}{2}} = 0,6 \sqrt{1 + \frac{1}{2}}$$

$$< 2 \frac{h(n)}{n} = 0,75 = \frac{3}{2} \cdot \frac{h(n)}{n}$$

ist

$$\|T_n\| \leq \cosh n \sqrt{A_n^2 - 1} < \cosh \frac{3}{2} h(n) .$$

3. Algebraische Polynome

Für algebraische Polynome sind die extremalen Polynome im Sinne von Satz 3 im allgemeinen nicht bekannt, doch läßt sich ein Satz beweisen, der dem Satz 4 über trigonometrische Polynome entspricht.

3.1 Schwankung von algebraischen Polynomen

Satz 5: Zu jeder Verteilung von $m+1$ Gitterpunkten mit

$$-1 \leq x_m < \dots < x_1 < x_0 \leq 1 ,$$

wobei nur für mindestens ein λ mit $0 < \lambda \leq m$ und

$$(3.1) \quad x_{\lambda-1} = \cos t_{\lambda-1} , \quad x_{\lambda} = \cos t_{\lambda}$$

der trigonometrische Abstand von $x_{\lambda-1}$ und x_{λ}

$$(3.2) \quad t_{\lambda} - t_{\lambda-1} = 2 \frac{h(n)}{n} .$$

mit

$$(3.3) \quad 0 < h(n) < n$$

ist, gibt es stets ein algebraisches Polynom P_n
höchstens n -ten Grades mit

$$(3.4) \quad |P_n(x)| \leq 1 \quad \text{für } -1 \leq x \leq x_{\lambda-1}$$

$$\text{und für } x_{\lambda} \leq x \leq 1$$

und

$$(3.5) \quad \frac{1}{2}(-1 + \cosh \frac{h(n)}{2}) \leq \|P_n\| \leq \frac{1}{2} (1 + \cosh \frac{3h(n)}{2}).$$

Gilt dabei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = \infty,$$

so ist also auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = \infty.$$

Beweis: Das Polynom P_n wird so konstruiert:

Zuerst wird mit

$$(3.6) \quad \tau_n := \frac{t_{\lambda} + t_{\lambda-1}}{2}$$

und

$$(3.7) \quad \alpha_n := \frac{t_{\lambda} - t_{\lambda-1}}{2} = \frac{h(n)}{n}$$

das trigonometrische Polynom

$$(3.8) \quad T_n(t) := T_n(t, \alpha_n) := W_n(t - \tau_n, \alpha_n)$$

nach dem Verfahren von 2.2 gebildet. T_n hat dann die Eigenschaften von Satz 4, ist aber, wie schon bei der Herleitung von $T_n(t, \alpha)$ in 2.2 erwähnt wurde, i.a. nicht ein gerades trigonometrisches Polynom, und deshalb zur Transformation der Funktionswerte einer Halbperiode in die eines algebraischen Polynoms ungeeignet. Darum wird nun folgendes trigonometrische Polynom betrachtet:

$$(3.9) \quad \overline{T}_n(t) := \frac{T_n(t) + T_n(-t)}{2} \quad .$$

Es genügt nun, $\overline{T}_n(t)$ nur für $0 \leq t \leq \pi$ zu betrachten.

Wegen

$$0 \leq t_{\lambda-1} = \tau_n - \alpha_n < t_\lambda = \tau_n + \alpha_n \leq \pi$$

ist

$$|T_n(t)| \leq 1 \quad \text{für} \quad -\pi \leq t \leq \tau_n - \alpha_n = t_{\lambda-1}$$

$$\text{und für } t_\lambda = \tau_n + \alpha_n \leq t \leq \pi \quad .$$

Deshalb ist

$$|\bar{T}_n(t)| \leq 1 \quad \text{für } 0 \leq t \leq \tau_n - \alpha_n = t_{\lambda-1}$$

$$\text{und für } t_\lambda = \tau_n + \alpha_n \leq t \leq \pi.$$

Schwieriger ist es, eine Aussage über $\bar{T}_n(t)$ für alle t mit $t_{\lambda-1} < t < t_\lambda$ zu machen. Für das folgende genügt es aber zu wissen, daß

$$t_{\lambda-1} < \tau_n < t_\lambda$$

und

$$\begin{aligned} \frac{-1 + \cosh \frac{h(n)}{2}}{2} &\leq \frac{T_n(-\tau_n) + T_n(\tau_n)}{2} \\ &= \bar{T}_n(\tau_n) \leq \frac{1 + \cosh \frac{3h(n)}{2}}{2} \end{aligned}$$

gilt.

Das gerade trigonometrische Polynom $\bar{T}_n(t)$ wird nun für $0 \leq t \leq \pi$ mittels

$$x = \cos t \quad \text{bzw.} \quad t = \arccos x$$

in ein algebraisches Polynom transformiert.
Für

$$(3.10) \quad P_n(x) := \bar{T}_n(\arccos x)$$

gilt also

$$|P_n(x)| \leq 1 \quad \text{für} \quad -1 \leq x \leq \cos t_\lambda = x_\lambda$$

$$\text{und für } x_{\lambda-1} = \cos t_{\lambda-1} \leq x \leq 1.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} (3.11) \quad \frac{-1 + \cosh \frac{h(n)}{2}}{2} &= P_n(x^*) \leq \|P_n\| \\ &\leq \frac{1 + \cosh \frac{3h(n)}{2}}{2} \end{aligned}$$

für

$$(3.12) \quad x^* := \cos \tau_n ;$$

und es ist

$$x_\lambda = \cos t_\lambda \leq x^* \leq \cos t_{\lambda-1} = x_{\lambda-1}.$$

Nun läßt sich auch leicht ein Satz beweisen, der dem Satz 3.2 von Ehlich (1966) entspricht.

Satz 6: Zu äquidistanten Gittern

$$x_i = 1 - i \frac{2}{m} \quad \text{für } i = 0, \dots, m$$

mit

$$m = \left[\frac{n^2}{h^2(n)} \right] ,$$

wobei

$$0 < h(n) < n$$

ist, gibt es eine Folge von Polynomen $P_n(x)$, die der Gitterbedingung

$$|P_n(x_i)| = 1 \quad \text{für } i = 0, \dots, m$$

genügen, für die aber

$$\|P_n\| \geq \frac{1}{2} \left(-1 + \cosh \frac{h(n)}{2} \right)$$

ist.

Gilt dabei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = \infty$$

bzw.

$$m = m(n) = o(n^2) ,$$

so ist also auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = \infty .$$

Beweis: Es wird ein x_1^* mit

$$1 - \frac{2}{m} = x_1 \leq x_1^* \leq x_0 = 1$$

angegeben, so daß x_1^* und x_0 die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllen. Dazu wird

$$t_1^* := \arccos x_1^* = \frac{2h(n)}{n}$$

gesetzt. Dann gilt für die trigonometrischen Abstände

$$t_1 - t_0 \geq t_1^* - t_0 = \frac{2h(n)}{n} ,$$

denn wegen

$$m \leq \frac{n^2}{h^2(n)}$$

ist

$$\cos t_1 = x_1 = 1 - \frac{2}{m} \leq 1 - \frac{2h^2(n)}{n^2} \leq \cos \frac{2h(n)}{n} = \cos t_1^* .$$

Damit leistet das Polynom P_n von Satz 5 das Verlangte und es ist

$$\frac{1}{2} (-1 + \cosh \frac{h(n)}{2}) \leq \|P_n\| .$$

3.2 Charakterisierung der algebraischen Extremal- polynome

Im Fall algebraischer Polynome lässt sich leicht eine Charakterisierung der den trigonometrischen extremalen Polynomen T_n entsprechenden algebraischen extremalen Polynomen R_n angeben. Es gilt nämlich:

Satz 7: Das algebraische Polynom R_n habe folgende Eigenschaften:

1. $R_n(x)$ genügt der Differentialgleichung

$$(3.13) \quad (y')^2(x-a)(x-c)(x^2-1) = n^2(y^2-1)(x-b)^2$$

mit

$$(3.14) \quad \min\{-1, a\} < \max\{-1, a\} < b < \min\{c, 1\} < \max\{c, 1\}$$

und

$$(3.15) \quad \int_{\max\{-1, a\}}^{\min\{c, 1\}} \sqrt{\frac{(t-b)^2}{(t-a)(t-c)(t^2-1)}} dt = 0.$$

2. Es ist

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} |R_n(x)| > 1 & \text{für } x < \min\{-1, a\} \\ & \text{für } \max\{-1, a\} < x < \min\{c, 1\} \\ & \text{und für } \max\{c, 1\} < x. \end{array} \right.$$

Gilt für ein beliebiges algebraisches Polynom

$r_n(x)$ höchstens n -ten Grades

$$|r_n(x)| \leq 1 \quad \text{für} \quad \min\{-1, a\} \leq x \leq \max\{-1, a\}$$

$$\text{und} \quad \text{für} \quad \min\{c, 1\} \leq x \leq \max\{c, 1\},$$

so ist

$$(3.17) \|r_n\| \leq \|R_n\| = \cosh n \int_{\max\{-1, a\}}^b \sqrt{\frac{(t-b)^2}{(t-a)(t-c)(t^2-1)}} dt.$$

In der Ungleichung (3.17) gilt das Gleichheitszeichen nur für

$$r_n \equiv R_n.$$

Beweis: O.B.d.A. sei $R_n(x) \geq 1$ für

$\max\{-1, a\} \leq x \leq \min\{c, 1\}$, sonst wird $-R_n$ betrachtet, das auch die Voraussetzung erfüllt, denn

darin geht nur der Betrag von R_n ein. Entsprechend

sei für $\tilde{x}$ mit $|r_n(\tilde{x})| = \|r_n\|$ auch $r_n(\tilde{x}) \geq 0$,

also $r_n(\tilde{x}) = \|r_n\|$. Außerdem gelte

$\max\{-1, a\} \leq \tilde{x} \leq \min\{c, 1\}$, denn sonst ist

$\|r_n\| \leq 1$, also, wie sich gleich bei den Vorbemerkungen über R_n herausstellen wird, nichts mehr zu beweisen.

Zum Vergleich von R_n und r_n werden einige Eigen-

schaften von R_n gebraucht, die sich leicht aus den Voraussetzungen für R_n ergeben.

Für die Nullstellen ξ_v von R'_n gilt aufgrund der Differentialgleichung (3.13)

$$(R_n^2(\xi_v) - 1)(\xi_v - b)^2 = 0.$$

Es ist also $|R_n(\xi_v)| = 1$ oder $\xi_v = b$.

R'_n hat nur einfache Nullstellen; denn wird die Annahme gemacht, ξ sei eine mindestens doppelte Nullstelle von R'_n , so ergibt sich: Ist $\xi = b$, so folgt aus $(x-\xi)^4 \mid (R'_n(x))^2$, daß auch $(x-\xi)^2 \mid (R_n^2(x) - 1)$ gilt, also $R_n^2(b) = 1$ im Widerspruch zur 2. Voraussetzung über R_n . Für $\xi \neq b$ ergibt sich

$(x-\xi) \mid (R_n^2(x) - 1)'''$. Wegen

$$(R_n^2(x) - 1)''' = 2(3R'_n(x)R''_n(x) + R_n(x)R'''_n(x))$$

und $|R_n(\xi)| = 1$ folgt also $R'''_n(\xi) = 0$ oder anders ausgedrückt, ξ ist mindestens dreifache Nullstelle von R'_n . Iteration dieser Überlegung ergibt, daß ξ einzige Nullstelle von R'_n ist im Widerspruch zu $R'_n(b) = 0$.

Weiterhin ist

$$R'_n(-1) R'_n(a) R'_n(c) R'_n(1) \neq 0 ,$$

denn sonst wäre -1 , a , c oder 1 aufgrund der Differentialgleichung (3.13) mindestens dreifache Nullstelle von $R_n^2(x) - 1$, also mindestens doppelte Nullstelle von R'_n , im Gegensatz zum oben bewiesenen. Derhalb können die Nullstellen von R'_n so bezeichnet und angeordnet werden:

$$\min\{-1, a\} < \xi_{n-1} < \dots < \xi_{\lambda+1} < \max\{-1, a\} < \xi_\lambda = b ,$$

$$\xi_\lambda = b < \min\{c, 1\} < \xi_{\lambda-1} < \dots < \xi_1 < \max\{c, 1\} .$$

Werden nun noch folgende Bezeichnungen gewählt:

$$\xi_n := \min \{-1, a\} ,$$

$$\xi_{\lambda+} := \max \{-1, a\} ,$$

$$\xi_{\lambda-} := \min \{c, 1\} ,$$

$$\xi_0 := \max \{c, 1\} ,$$

so gilt

$$R_n(\xi_{\lambda+}) = R_n(\xi_{\lambda-}) = 1 ,$$

$$R_n(\xi_\nu) = (-1)^{\lambda+\nu}$$

für $\nu = 0, \dots, \lambda-1$ und für $\nu = \lambda+1, \dots, n$,

denn sonst müßte zwischen $\xi_{\lambda+}$ und ξ_{λ} bzw. zwischen ξ_{λ} und $\xi_{\lambda-}$ nach dem Satz von Bolzano eine Nullstelle von R_n liegen, was gegen die 2. Voraussetzung für R_n verstößt; und zwischen zwei in obiger Numerierung benachbarten Stellen mit $|R_n(\xi)| = 1$ nach dem Satz von Rolle eine Nullstelle von R'_n liegen. Da es aber außer den angegebenen Nullstellen von R'_n keine weiteren gibt und die angegebenen diese Bedingung nicht erfüllen, führt das jeweils auf einen Widerspruch.

Damit ist auch $|R_n(x)| \leq 1$ für

$$\min \{-1, a\} \leq x \leq \max \{-1, a\} \text{ und für}$$

$$\min \{c, 1\} \leq x \leq \max \{c, 1\} .$$

Nun wird gezeigt, daß die Annahme

$$r_n \neq R_n \quad \text{und} \quad \|r_n\| \geq \|R_n\|$$

stets zu einem Widerspruch führt. Dazu wird das Polynom höchstens n-ten Grades betrachtet:

$$s_n := R_n - \frac{\|R_n\|}{\|r_n\|} r_n .$$

Wegen $\frac{\|R_n\|}{\|r_n\|} \leq 1$ hat s_n im Intervall

$\min \{-1, a\} \leq x \leq \max \{-1, a\}$ an den $n+1-\lambda$ Stellen

$\xi_n, \xi_{n-1}, \dots, \xi_{\lambda+1}, \xi_{\lambda+}$ schwach alternierendes Vorzeichen und also nach Satz 2 mindestens $n-\lambda$

Nullstellen. Im Intervall $\min\{c, 1\} \leq x \leq \max\{c, 1\}$ hat s_n an den $\lambda+1$ Stellen $\xi_{\lambda}, \xi_{\lambda-1}, \dots, \xi_1, \xi_0$ schwach alternierendes Vorzeichen und also mindestens λ Nullstellen.

Da $x = b$ der einzige Wert mit $R'_n(x) = 0$ im Intervall $\max\{-1, a\} \leq x \leq \min\{c, 1\}$ ist und hierfür $R_n(x) > 1$ ist, gilt $R_n(b) = \|R_n\|$. Ist nun $\tilde{x} = b$, so ist

$$s_n(b) = \|R_n\| - \frac{\|R_n\|}{\|r_n\|} \|r_n\| = 0,$$

ist andererseits $x \neq b$, so ist

$$s_n(b) = \|R_n\| - \|R_n\| \frac{r_n(b)}{\|r_n\|} \geq 0$$

und

$$s_n(\tilde{x}) = R_n(\tilde{x}) - \frac{\|r_n\|}{\|r_n\|} \|R_n\| < 0.$$

so daß es nach dem Satz von Bolzano zwischen $\tilde{x}$ und b auch mindestens eine Nullstelle von s_n im Intervall $\max\{-1, a\} \leq x \leq \min\{c, 1\}$ gibt. In beiden Fällen hat das Polynom s_n höchstens n -ten Grades zusammen mit den n Nullstellen aus den beiden weiter oben betrachteten Intervallen $\min\{-1, a\} \leq x \leq \max\{-1, a\}$ und $\min\{c, 1\} \leq x \leq \max\{c, 1\}$ mindestens $n+1$ Nullstellen, was ein Widerspruch ist.

Jetzt ist nur noch der Ausdruck für $\|R_n\|$ herzuleiten: Für x mit $\max\{-1, a\} \leq x \leq b$ und x mit $\min\{c, 1\} \geq x \geq b$ kann zur Lösung der Differentialgleichung (3.13) der Ansatz

$$y = \cosh z$$

verwandt werden. Dann ist (wie im Beweis von Satz 1)

$$y^2 - 1 = \cosh^2 z - 1 = \sinh^2 z$$

und

$$y' = z' \sinh z ,$$

also

$$(z')^2 (y^2 - 1)(x-a)(x-c)(x^2-1) = n^2 (y^2 - 1)(x-b)^2$$

und

$$z' = n \sqrt{\frac{(x-b)^2}{(x-a)(x-c)(x^2-1)}}$$

Damit ist

$$R_n(x) = \cosh n \int_{\max\{-1, a\}}^x \sqrt{\frac{(t-b)^2}{(t-a)(t-c)(t^2-1)}} dt$$

für $\max \{-1, a\} \leq x \leq b$ und

$$R_n(x) = \cosh n \int_{\min\{c, 1\}}^x \sqrt{\frac{(t-b)^2}{(t-a)(t-c)(t^2-1)}} dt$$

für $\min\{c, 1\} \geq x \geq b$, und also auch

$$\|R_n\| = R_n(b) = \cosh n \int_{\max\{-1, a\}}^b \sqrt{\frac{(t-b)^2}{(t-a)(t-c)(t^2-1)}} dt.$$

3.3 Spezielle Extremalpolynome

Im Satz 7 wird nichts über die Existenz solcher algebraischer Extremalpolynome ausgesagt; jedoch können sie in einigen speziellen Fällen konstruiert werden.

3.3.1 Zuerst wird der Fall behandelt, bei dem für alle ξ mit $R'_n(\xi) = 0$ gilt, daß $\xi \neq b$ ist, also $b = \xi_1$ ist, bzw. in den Bezeichnungen von Satz 5, daß der trigonometrische Abstand von $x_0 = 1$ und x_1 in die Voraussetzung eingeht. (Die Betrachtung von $R_n(-x)$ ergibt dann den bezüglich der Ordinatenachse dazu symmetrischen Fall.)

Ausgangspunkt für die Konstruktion sind die Zolotarev-Polynome $u_n(\bar{x}, B)$ (vgl. Ehlich (1966) und die dort zitierte Literatur; N.B. gegenüber der dortigen Bezeichnung sind A und B vertauscht!)

Definition: Das Zolotarev-Polynom $u_n(\bar{x}, B)$ wird für jedes B mit $1 < B < \infty$ eindeutig bestimmt durch

(a) $u_n(\bar{x}, B)$ ist ein Polynom vom genauen Grad n,

(b) in $(-1, 1)$ besitzt die Gleichung $u_n^2(\bar{x}, B) - 1 = 0$ genau n-2 doppelte Nullstellen $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_1(B)$ mit

$$-1 < \bar{\xi}_{n-1} < \dots < \bar{\xi}_2 < 1,$$

(c) es ist

$$u_n(-1, B) = (-1)^{n-1}, \quad u_n(1, B) = 1$$

und

$$u'_n(B, B) = 0.$$

Für die Zolotarev-Polynome gelten dann folgende Sätze:

(d) Durch B sind eindeutig Zahlen A und C mit

$$1 < B < A < C < \infty$$

bestimmt, so daß

$$u_n(A, B) = 1 \quad \text{und} \quad u_n(C, B) = -1$$

gilt. A und C sind streng monoton wachsende Funktionen von B. (Sie können deshalb auch als Parameter für $u_n(\bar{x}, \cdot)$ gewählt werden.)

(e) Das Zolotarev-Polynom $u_n(\bar{x}, B)$ genügt der Differentialgleichung

$$(y')^2(\bar{x}-A)(\bar{x}-C)(\bar{x}^2-1) = n^2(y^2-1)(\bar{x}-B)^2$$

und es gilt für $1 \leq \bar{x} \leq A$

$$u_n(\bar{x}, B) = \cosh n \int_1^{\bar{x}} \sqrt{\frac{(t-B)^2}{(t-A)(t-C)(t^2-1)}} dt .$$

Diese Differentialgleichung hat genau die Gestalt der von (3.13); nur erfüllen $-1, 1, B, A, C$ nicht die Ungleichungen (3.14). Deshalb muß $u_n(\bar{x}, B)$ noch geeignet transformiert werden; und zwar wird $u_n(\bar{x}, B)$ unter zwei verschiedenen Abbildungen betrachtet:

Zuerst wird die Abbildung

$$x = \frac{2\bar{x}}{1+C} + \frac{1-C}{1+C}$$

angewandt. Dann sind die Bilder von $-1, 1, B, A, C$ in der gleichen Anordnung $-1,$

$$a := \frac{2-C}{1+C}, \quad b := \frac{2B+1-C}{1+C}, \quad c := \frac{2A+1-C}{1+C},$$

und

$$(R_n(x) :=) z_n(x, b) := u_n(\bar{x}, B)$$

erfüllt die Differentialgleichung (3.13)

$$(y')^2(x-a)(x-c)(x^2-1) = n^2(y^2-1)(x-b)^2,$$

wobei $-1, a, b, c, 1$ (3.14) erfüllen, d.h. $z_n(b)$ ist Extremalpolynom unter allen Polynomen r_n höchstens

n-ten Grades mit

$$|r_n(x)| \leq 1 \quad \text{für } -1 \leq x \leq a$$

$$\text{und} \quad \text{für } c \leq x \leq 1,$$

und es ist

$$\|z_n(b)\| = \cosh n \int_a^b \sqrt{\frac{(t-b)^2}{(t-a)(t-c)(t^2-1)}} dt.$$

Nun wird $u_n(\bar{x}, B)$ unter der Abbildung

$$x = \frac{2\bar{x}}{1+A} + \frac{1-A}{1+A}$$

betrachtet. Die Bilder von $-1, 1, B, A, C$ sind jetzt
(wieder in der gleichen Reihenfolge) $-1,$

$$a := \frac{3-A}{1+A}, \quad b := \frac{2B+1-A}{1+A}, \quad 1, \quad c := \frac{2C+1-A}{1+A}$$

$$\text{und} \quad (R_n(x) :=) Z_n(x, b) := u_n(\bar{x}, B)$$

genügt der Differentialgleichung (3.13), wobei
 $-1, a, b, 1$ und c die Ungleichungen (3.14) erfüllen.

$Z_n(b)$ ist also Extremalpolynom unter allen Polynomen
 r_n höchstens n-ten Grades mit

$$|r_n(x)| \leq 1 \quad \text{für } -1 \leq x \leq a$$

$$\text{und} \quad \text{für } 1 \leq x \leq c;$$

außerdem gilt

$$Z_n(b) = \cosh n \int_a^b \sqrt{\frac{(t-b)^2}{(t-a)(t-c)(t^2-1)}} dt .$$

Es zeigt sich nun, daß die Bedingung: "Für ξ mit $R'_n(\xi) = 0$ gilt $\xi \leq b$ ". sehr stark ist; die Vergleichspolynome r_n brauchen nämlich nicht mehr die Bedingung

$$|r_n(x)| \leq 1 \quad \text{für} \quad \min \{c, 1\} \leq x \leq \max \{c, 1\}$$

zu erfüllen, sondern es ist hinreichend, daß

$$|r_n(\min \{c, 1\})| \leq 1$$

ist. Zum Nachweis dieses Zusammenhanges wird auf den Beweis von Satz 7 zurückgegriffen. Im dortigen Beweisgang ist ein Widerspruch herzuleiten. Um diesen zu erhalten, ist es notwendig, hier zu zeigen, daß

$$s_n := R_n - \frac{\|R_n\|}{\|r_n\|} r_n$$

im Intervall $\max \{-1, a\} \leq x \leq \min \{c, 1\}$ mindestens zwei Nullstellen hat. Ist $b = \tilde{x}$, dann ist

$$s_n(b) = \|R_n\| - \frac{\|R_n\|}{\|r_n\|} \|r_n\| = 0$$

und

$$s'_n(b) = R'_n(b) - \frac{\|R_n\|}{\|r_n\|} r'_n(\tilde{x}) = 0 ,$$

denn wegen $\max \{-1, a\} \leq \tilde{x} = b \leq \min \{c, 1\}$ folgt aus $r_n(\tilde{x}) = \|r_n\|$, daß $r'_n(\tilde{x}) = 0$ ist, so daß also b doppelte Nullstelle von s_n ist.

Nicht ganz so glatt verläuft die Untersuchung, wenn $\tilde{x} \neq b$ ist. Mit $\xi_{1+} = \max \{-1, a\} = a$ und $\xi_{1-} = \min \{c, 1\}$ gilt nun

$$\begin{aligned} s_n(\xi_{1+}) &\geq 0 , & s_n(b) &\geq 0 , \\ s_n(\tilde{x}) &\leq 0 , & s_n(\xi_{1-}) &\geq 0 . \end{aligned}$$

Ist nun $s_n(\xi_{1+}) > 0$ oder

$$s_n(\xi_{1+}) = 0 \quad \text{und} \quad b < \tilde{x} ,$$

so gibt es nach dem Satz von Bolzano mindestens zwei Nullstellen von s_n im Intervall $b \leq x \leq \xi_{1-}$, also auch im Intervall $\xi_{1+} < x \leq \xi_{1-}$.

Schwierigkeiten macht nur noch der Fall, daß

$$s_n(\xi_{1+}) = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{x} < b$$

ist. Dann ist

$$\begin{aligned} s_n(\xi_2) &\leq 0 , & s_n(\xi_{1+}) &= 0 , \\ s_n(\tilde{x}) &\leq 0 \quad \text{und} & s_n(b) &\geq 0 , \end{aligned}$$

so daß neben ξ_{1+} noch eine weitere Nullstelle von s_n zwischen $\tilde{x}$ und b im Intervall $\xi_{1+} \leq x \leq \xi_{1-}$ liegt. In diesem Fall liegt aber mindestens noch eine weitere Nullstelle von s_n im Intervall $(\xi_{1+}, \tilde{x})$, falls $\|R_n\| r'_n(\xi_{1+}) < \|r_n\| R'_n(\xi_{1+})$ ist, und im Intervall $[\xi_2, \xi_{1+})$, falls $\|R\| r'_n(\xi_{1+}) > \|r_n\| R'_n(\xi_{1+})$ ist. Gilt dabei $s_n(\xi_2) = 0$, so folgt wegen $R'_n(\xi_2) = 0$ und $r'_n(\xi_2) = 0$, daß auch $s'_n(\xi_2) = 0$ ist, so daß die doppelte Nullstelle ξ_2 auf die beiden angrenzenden Intervalle $\xi_3 \leq x \leq \xi_2$ und $\xi_2 \leq x \leq \xi_{1+}$ verteilt werden kann. Ist aber

$\|R_n\| r'_n(\xi_{1+}) = \|r_n\| R'_n(\xi_{1+})$, so ist ξ_{1+} doppelte Nullstelle von s_n .

Damit sind also für das Polynom s_n höchstens n -ten Grades wieder stets $n+1$ Nullstellen nachgewiesen und es ergibt sich die Aussage:

Das Polynom $z_n(b)$ bzw. $Z_n(b)$ ist Extremalpolynom unter allen Polynomen r_n höchstens n -ten Grades mit

$$|r_n(x)| \leq 1 \quad \text{für } -1 \leq x \leq a$$

und für $x = c$ bzw. $x = 1$.

3.3.2 Nun werden gerade Extremalpolynome für

$$-1 < a < b = 0 < c = -a < 1$$

konstruiert. Bei der Konstruktion wird von geraden Čebyšev-Polynomen ausgegangen, für die mit $n = 2N$ gilt:

$$\check{C}_{2N}(x) = \check{C}_{2N}(-x) ,$$

$$\check{C}_{2N}(1) = \check{C}_{2N}(-1) = 1 ;$$

in $(-1,1)$ gibt es $2N-1$ Stellen γ_i mit

$$-1 < \gamma_{2N-1} < \dots < \gamma_N = 0 < \dots < \gamma_1 < 1$$

und

$$\check{C}'_{2N}(\gamma_i) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, 2N-1 ;$$

$$\gamma_i = -\gamma_{2N-i} \quad \text{für } i = 1, \dots, N ;$$

mit $\gamma_{2N} := -1$ und $\gamma_0 := 1$ ist

$$\check{C}_{2N}(\gamma_i) = (-1)^i \quad \text{für } i = 0, \dots, 2N .$$

Mit $A > 1$ wird nun die Transformation

$$\bar{x} = \frac{1}{A} x$$

durchgeführt. Für

$$C_{2N}(\bar{x}) := \check{C}_{2N}(x)$$

gelten dann die obigen Eigenschaften für

$$\bar{\eta}_i := \frac{1}{A} \eta_i \quad \text{für } i = 0, \dots, 2N.$$

Außerdem ist

$$\|C_{2N}\| = C_{2N}(-1) = C_{2N}(1) = \check{C}_{2N}(A).$$

Für $-1 \leq \bar{x} \leq 1$ wird nun das trigonometrische Polynom

$$\bar{c}_{2N}(\bar{t}) := C_{2N}(\cos \bar{t})$$

betrachtet, das aufgrund der Symmetrie der Kosinusfunktion für die gesamte $\bar{t}$ - Achse erklärt wird.

$\bar{c}_{2N}(\bar{t})$ ist ein trigonometrisches Polynom, das nur Potenzen von $\cos^2 \bar{t}$ enthält.

Vermöge der Translation

$$\bar{t} = t + \frac{\pi}{2}$$

wird nun so transformiert, daß für

$$d_{2N}(t) := \bar{c}_{2N}(\bar{t})$$

folgendes gilt

$$d_{2N}(\frac{\pi}{2} + \arccos \bar{\gamma}_i) = \chi_{2N}(\gamma_i) = (-1)^i \text{ für } i=0, \dots, N,$$

$$d_{2N}(\frac{\pi}{2}) = \chi_{2N}(A),$$

$$d'_{2N}(\frac{\pi}{2} + \arccos \bar{\gamma}_i) = \chi'_{2N}(\gamma_i) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, N,$$

$$d'_{2N}(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Wegen $\cos^2 \bar{t} = \cos^2(t + \frac{\pi}{2}) = \sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ enthält auch das Polynom $d_{2N}(t)$ nur Potenzen von $\cos^2 t$, ist also ein reines Kosinuspolynom und kann deshalb mittels

$$t = \arccos x \quad \text{für } 0 \leq t \leq \pi$$

in ein algebraisches Polynom transformiert werden.

$$D_{2N}(x) := d_{2N}(\arccos x)$$

erfüllt die Differentialgleichung (3.13) mit

$$a := \cos(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{1}{A})$$

$$b := \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$c := -a = \cos(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{A}),$$

denn für

$$\pm \xi_i := \cos \left(\frac{\pi}{2} \pm \arccos \eta_i \right) \quad \text{für } i = 0, \dots, N$$

gilt

$$D_{2N}(\pm \xi_i) = (-1)^i \quad \text{für } i = 0, \dots, N$$

$$D'_{2N}(\pm \xi_i) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, N-1$$

$$D_{2N}(b) = 0.$$

Also ist D_{2N} Extremalpolynom für alle Polynome r_n mit

$$|r_n(x)| \leq 1 \quad \text{für } x \text{ mit } -a \leq |x| \leq 1,$$

und es ist

$$\|D_{2N}\| = \chi_{2N}(A)$$

mit

$$A = \frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \arccos a \right)}.$$

3.3.3 Achieser (1932) konstruierte von einem Modul k mit $0 \leq k < 1$ ausgehend unter Verwendung der Jacobischen Theta-Funktionen

$$\mathfrak{h}_1\left(\frac{u}{2K}\right) = H(u), \quad \mathfrak{h}_2\left(\frac{u}{2K}\right) = \Theta(u), \quad \mathfrak{h}_3\left(\frac{u}{2K}\right) = \Theta_1(u)$$

die Polynome n -ten Grades

$$T_n(x; m, k) = \frac{L}{2} \left\{ \left(\frac{H(u - \frac{m}{n}K)}{H(u + \frac{m}{n}K)} \right)^n + \left(\frac{H(u + \frac{m}{n}K)}{H(u - \frac{m}{n}K)} \right)^n \right\}$$

mit

$$x = \frac{\operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{m}{n} K + \operatorname{cn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{m}{n} K}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \frac{m}{n} K},$$

$$L = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{\Theta(0) \Theta_1(0)}{\Theta(\frac{m}{n}K) \Theta_1(\frac{m}{n}K)} \right)^{2n}$$

und

$$1 \leq m \leq n-1.$$

Es zeigte dann u.a., daß mit

$$a := 1 - 2 \operatorname{sn}^2 \frac{m}{n} K,$$

$$c := 2 \operatorname{sn}^2 \frac{n-m}{n} K - 1,$$

$$b := \frac{a+c}{2}, \quad \text{mit} \quad \frac{2 \operatorname{sn} \frac{m}{n} K \cdot \operatorname{cn} \frac{m}{n} K}{\operatorname{cn} \frac{m}{n} K} \left(\frac{1}{\operatorname{sn} \frac{2m}{n} K} \frac{\Theta'(\frac{m}{n}K)}{\Theta(\frac{m}{n}K)} \right)$$

$$a < b < c$$

gilt, $T_n(x;m,k)$ der Differentialgleichung

$$(y')^2(x-a)(x-c)(x^2-1) = n^2(y^2-L^2)(x-b)^2$$

und den Bedingungen (3.15) und (3.16) genügt.

Damit erfüllen die Polynome $\frac{1}{L} T_n(x;m,k)$ die Voraussetzungen von Satz 7 und sind für die durch sie bestimmten Werte Extremalpolynome. Die Existenz eines solchen Polynoms zu vorgegebenen a, c, m und n kann aber nicht behauptet werden, denn führt man das Konstruktionsverfahren mit vorgegebenen Werten a und c durch, so ergeben sich Extremalpolynome für

$$-1 \leq a \leq b(c^*) \leq c^* \leq 1$$

und für

$$-1 \leq a^* \leq b(a^*) \leq c \leq 1$$

mit

$$a \leq a^* \leq c^* \leq c$$

4. Literaturverzeichnis

Achyeser, N. (1932): Über einige Funktionen, welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen. Bull. Ac. Sci. URSS 1932, 1163 - 1202 .

Ehlich, H. (1967): Approximationstheorie. Ausgegebene Notizen zur Vorlesung im WS 1966/67 an der Ruhr-Universität Bochum, 85 Seiten.

.... (1966): Polynome zwischen Gitterpunkten. Math. Zeitschrift 93 (1966), 144 - 153 .

Ehlich, H., und Zeller, K. (1965): Numerische Abschätzung von Polynomen. ZAMM 45 (1965), T 20 - T 22 .

.... (1964): Schwankung von Polynomen zwischen Gitterpunkten. Math. Zeitschrift 86 (1964), 41 - 44.

Erdős, P., und Szegő, G. (1942): On a Problem of I. Schur. Annals of Math. 43 (1942), 451 - 470.

Faber, G. (1914): Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen. Jahresber. DMV 23 (1914), 192 - 210 .

- Fejér, L. (1930): Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalls gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen. Math. Zeitschrift 32 (1930), 426 - 457 .
- Motzkin, T.S., und Walsh, J.L. (1959): Polynomials of best Approximation on a real finite Point Set. Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), 231 - 245 .
- Natanson, I.P. (1965): Constructive Function Theory, Vol. III: Interpolation and Approximation Quadratures, Fred. Ungar Publ. Co., New York, 1965 .
- Riesz, M. (1914): Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome. Jahresber. DMV 23 (1914), 354 - 368 .
- Schur, I. (1919): Über das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms in einem gegebenen Intervall. Math. Zeitschrift 4 (1919), 271 - 287 .
- Sloss, J.M. (1965): Chebyshev Approximation to Zero. Pac. J. Math. 15 (1965), 305 - 313 .

Lebenslauf

Am 11. April 1937 wurde ich, Eckhard Rüdiger Voges, als zweiter Sohn des Vermessungsingenieurs Henning Voges und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Hintz, in Stettin geboren. Volksschulen besuchte ich in Stettin-Glambecksee und nach 1945 in Pahlen-Dörpling in Schleswig-Holstein, Gymnasien in Heide und in Reutlingen, wo ich 1957 das Abitur ablegte. Danach studierte ich an der Eberhard-Karls-Universität in Tübingen Mathematik und Physik und bestand dort 1965 das Staatsexamen für das Lehramt an Höheren Schulen. Meine Zulassungsarbeit, die ich unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. Max Müller anfertigte, hat den Titel "Über das Produkt von n linearen, homogenen Formen" und steht in Zusammenhang mit der Minkowski-Vermutung in der Geometrie der Zahlen. Ich war dann wissenschaftliche Hilfskraft an der Universität in Tübingen und ab 1966 verwaltete ich die Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten an der Ruhr-Universität Bochum.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren O.F. Bollnow, W. Braunbek, H. Ehlich, B. Baron von Freytag, B. Huppert, H. Kneser, H. Krüger, R. Mühleisen, E. Müller, M. Müller, G. Pickert, P. Roquette, W. Rüdorff, W. Schulz. H. Wielandt und K. Zeller.





BAMBERGER FOTODRUCK RUDOLF RODENBUSCH
8600 BAMBERG - Markusplatz 22 - Tel.: 0951/6 27 94